الحاضرة
الثامنة

$\sin 2t = 2\sin t\cos t$

مثال ٤ ص ١٣٨

اوجد المعادلة التكاملية الاتية ①

$$g(x) = \cos 2x + \lambda\int_0^{\pi} \sin(x - 2t)\, g(t)\, dt$$

ثم اوجد حل مستوى المعادلة المتجانسة الموافقة المعادلة المعطاة ؛ ثم حل في حالة $\lambda = -\frac{3}{4}$

$k(x,t) = \sin(x - 2t) = \sin x \cos 2t - \cos x \sin 2t$

$a_1(x) = \sin x \quad a_2(x) = -\cos x$

الحل ① $b_1(t) = \cos 2t \quad b_2(t) = \sin 2t$

$g(x) = f(x) + \lambda \sum c_i a_i(x)$

$g(x) = \cos 2x + \lambda c_1 \sin x - \lambda c_2 \cos x$ ②

نوجد c_1 و c_2

$f_i + \lambda \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} c_j = c_i \quad i=1,2$

$$\left.\begin{aligned} f_1 + \lambda\alpha_{11}c_1 + \lambda\alpha_{12}c_2 &= c_1 \\ f_2 + \lambda\alpha_{21}c_1 + \lambda\alpha_{22}c_2 &= c_2 \end{aligned}\right\} ③$$

$f_i = \int_0^{\pi} b_i(t) f(t)\, dt \qquad \alpha_{ij} = \int_0^{\pi} b_i(t) a_j(t)\, dt$

② $f_1 = \int_0^{\pi} \cos 2t \cdot \cos 2t\, dt = \int_0^{\pi} \cos^2 2t\, dt$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 + \cos 4t)\, dt = \frac{\pi}{2}$ $\boxed{f_1 = \frac{\pi}{2}}$

$f_2 = \int_0^{\pi} \cos 2t \cdot \sin 2t\, dt = \frac{1}{2}\int \sin 4t\, dt$ $\boxed{f_2 = 0}$

$\alpha_{11} = \int_0^{\pi} \cos 2t \cdot \sin t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin 3t - \sin t\, dt$

$\alpha_{11} = -\frac{2}{3}$ $\boxed{\alpha_{11} = -\frac{2}{3}}$

$\alpha_{12} = 0 \qquad \alpha_{21} = 0 \qquad \alpha_{22} = -\frac{4}{3}$

نبدل هذه القيم في ③ نجد

$$\left.\begin{aligned} (1 + \tfrac{2}{3}\lambda)\, c_1 &= \tfrac{\pi}{2} \\ (1 + \tfrac{4}{3}\lambda)\, c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} ④$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 + \frac{2}{3}\lambda & 0 \\ 0 & 1 + \frac{4}{3}\lambda \end{vmatrix}$$

$= (1 + \frac{2}{3}\lambda)(1 + \frac{4}{3}\lambda)$

وهنا نميز حالتين

الحالة ① $D(\lambda) \neq 0 \Leftarrow \lambda \neq -\frac{3}{4} \quad \neq -\frac{3}{2}$

في هذه الحالة يوجد للمعادلة ① حل وحيد

لنوجد هذا الحل نوجد c_1 و c_2 في ④

ونبدل القيم في ②

من ④ $c_1 = \frac{3\pi}{2(3 + 2\lambda)}$

$c_2 = 0$

نبدل في ②

$$g(x) = \cos 2x + \frac{3\lambda\pi}{2(3 + 2\lambda)} \sin x$$

الحالة ② $D(\lambda) = 0$ ← $\lambda = -\frac{3}{4}$ أو $\lambda = -\frac{3}{2}$

نضع $\lambda = -\frac{3}{4}$ ثم نبدل في ④ فنجد

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}c_1 = \tfrac{\pi}{2} &\Rightarrow c_1 = \pi \\ &\Rightarrow 0c_2 = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &c_1 = \pi \\ &\forall c_2 \end{aligned}$$

وبالتالي المعادلة ① لها عدد لانهائي من الحلول

وذلك نبدل $c_1 = \pi$ ثم نبدل في ②

$$g(x) = \cos 2x - \frac{3}{4}\pi \sin x + \frac{3}{4} c_2 \cos x \quad \forall c_2$$

④ نعوض في $\lambda = -\frac{3}{2}$ ⑥

$$0\,c_1 = \frac{\pi}{2}, \quad -c_2 = 0 \qquad 0 = \frac{\pi}{2} \;\; \forall c_1, \quad -c_2 = 0$$

∴ المعادلة [illegible] لأن $0 = \frac{\pi}{2}$ [illegible]

[illegible] المعادلة ① ليس لها حل عند $\lambda = -\frac{3}{2}$

• [illegible] $\lambda = -\frac{3}{4}$ [illegible] المعادلة [illegible] [illegible]

$$\psi(t) = \lambda \int_{0}^{\pi} K(t,x)\,\psi(t)\,dt$$

$$\psi(t) = -\frac{3}{4} \int \sin(t-2x)\,\psi(t)\,dt \quad ①$$

$$\sin(t-2x) = \sin t \cos 2x - \cos t \sin 2x$$

$$a_1(x) = \cos 2x \qquad a_2(x) = -\sin 2x$$

$$b_1(t) = \sin t \qquad b_2(t) = \cos t$$

$$\psi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{2} c_i\, a_i(x)$$

$$\psi(x) = -\frac{3}{4} c_1 \cos 2x + \frac{3}{4} c_2 \sin 2x \quad ②$$

$$\lambda \sum \alpha_{ki}\, c_k = c_i$$

$$-\frac{3}{4}\alpha_{11} c_1 - \frac{3}{4}\alpha_{21} c_2 = c_1$$
$$-\frac{3}{4}\alpha_{21} c_1 - \frac{3}{4}\alpha_{22} c_2 = c_2 \quad ③$$

[illegible] α_{ij}

$$\alpha_{11} = -\frac{3}{4} \quad \alpha_{12} = 0 \quad \alpha_{21} = 0 \quad \alpha_{22} = -\frac{4}{3}$$

نعوض في ③

$$\frac{1}{2} c_1 = c_1$$
$$c_2 = c_2$$

$$\frac{1}{2} c_1 - c_1 = 0$$
$$c_2 - c_2 = 0$$

$$-\frac{1}{2} c_1 = 0, \quad (0)\,c_2 = 0 \qquad c_1 = 0, \;\; \forall c_2$$

نعوض في ②

$$\psi(x) = \frac{3}{4} c_2 \sin 2x \qquad \forall c_2$$

$$\psi(x) = -\frac{3}{4} \int_0^{1} \sin(t-2x)\,\psi(t)\,dt$$

$$\psi = \lambda \sum_{i=1}^{2} c_i\, a_i(x)$$

$$\psi = -\frac{3}{4} c_1 \cos 2x + \frac{3}{4} c_2 \sin 2x$$

[illegible] $c_1 = c_1$ [illegible]

[illegible] في ④

$$\left(1 + \frac{3}{4}\lambda\right) c_1 = 0$$
$$\left(1 + \frac{4}{3}\lambda\right) c_2 = 0$$

عند $\lambda = \frac{3}{4}$ [illegible]

$$\left(1 - \frac{3}{3}\cdot\frac{3}{4}\right) c_1 = 0$$
$$\left(1 - \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\right) c_2 = 0$$

$$\frac{1}{4} c_1 = 0, \quad 0\,c_2 = 0 \qquad c_1 = 0, \;\; \forall c_2$$

نعوض في ② [illegible]

/ /

مثال 5 حل المعادلة التكاملية الآتية

① $g(x) = 1 + \lambda \int_0^1 (1 - 3xt)\, g(t)\, dt$

مستخدماً طريقة التقريبات المتتالية ثم أوجد المحلل

② $g(x) = g_0(x) + \lambda g_1(x) + \lambda^2 g_2(x) + \lambda^3 g_3(x) + \cdots$

$f(x) = 1 \qquad k(x,t) = 1 - 3xt$

$g_0(x) = f(x) = 1$

$g_n(x) = \int_0^1 k(x,t)\, g_{n-1}(t)\, dt$

$g_1(x) = \int_0^1 (1 - 3xt)\, 1\, dt = 1 - \frac{3}{2}x$

$g_2(x) = \int_0^1 (1 - 3xt)(1 - \frac{3}{2}x)\, dt = \frac{1}{4}$

$g_3(x) = \int_0^1 (1 - 3xt)\frac{1}{4}\, dt = \frac{1}{4}(1 - \frac{3}{2}x)$

$g_4(x) = \frac{1}{4}\int_0^1 (1 - 3xt)(1 - \frac{3}{2}x)\, dt = \frac{1}{16}$

نعوض في ②

$g(x) = 1 + \lambda(1 - \frac{3}{2}x) + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^3}{4}(1 - \frac{3}{2}x) + \frac{1}{16}\lambda^4 + \frac{1}{16}\lambda^4 (1 - \frac{3}{2}x)$

$g(x) = 1 + \lambda(1 - \frac{3}{2}x) + \frac{1}{4}\lambda^2 [1 + \lambda(1 - \frac{3}{2}x)] + \frac{1}{16}\lambda^4 [1 + \lambda(1 - \frac{3}{2}x)]$

$g(x) = [1 + \lambda(1 - \frac{3}{2}x)][1 + \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{16}\lambda^4 \cdots]$

$g(x) = [1 + \lambda(1 - \frac{3}{2}x)][1 + (\frac{\lambda}{2})^2 + (\frac{\lambda}{2})^4 + \cdots]$

نعوض $\mu = \frac{\lambda}{2}$

$1 + \mu + \mu^2 + \cdots \qquad |\mu| < 1$

وهي متتالية هندسية

$g(x) = [1 + \lambda(1 - \frac{3}{2}x)] \frac{1}{1 - (\frac{\lambda}{2})^2}$

$|\frac{\lambda}{2}| < 1 \qquad |\lambda| < 2$

$g(x) = \frac{4 + 2\lambda(2 - 3x)}{4 - \lambda^2}$

هذا الحل صالح لجميع قيم λ

ما عدا $\lambda = \pm 2$

★ $R(x,t,\lambda) = k_1(x,t) + \lambda k_2(x,t) + \lambda^2 k_3(x,t)$ المحللة النواة

$k_1(x,t) = 1 - 3xt$

$k_n(x,t) = \int_0^1 k_{n-1}(x,y)\, k(y,t)\, dy$

$k_2(x,t) = \int_0^1 (1 - 3xy)(1 - 3yt)\, dy$

$= 1 - \frac{3}{2}(x + t) + 3xt$

$k_3(x,t) = \int_0^1 (1 - \frac{3}{2}(x+t) + 3xt)(1 - 3yt)\, dy$

$= \frac{1}{4} k_1(x,t)$

$k_4 = \frac{1}{4} k_2(x,t) \; - - - -$

$k_n = \frac{1}{4} k_{n-2}(x,t)$

نعوض في ★

$R(x,t,\lambda) = (1 - 3xt)\{1 + (\frac{\lambda}{2})^2 + (\frac{\lambda}{2})^4 + \cdots\}$

$+ \lambda(1 - \frac{3}{2}(x+t) + 3xt)\{1 + (\frac{\lambda}{2})^2 + (\frac{\lambda}{2})^4 + \cdots\}$

$= \{1 + (\frac{\lambda}{2})^2 + (\frac{\lambda}{2})^4 \cdots\}\{(1 - 3xt) + \lambda(1 - \frac{3}{2}(x+t) + 3xt)\}$

$$= \frac{(1+\lambda) - \frac{3}{2}(x+t)\lambda - 3(1-\lambda)xt}{1 - \frac{1}{4}\lambda^2}$$

$|\lambda| < 2$ وهو المطلوب

مثال 7 ص 147

اوجد قيم الوسيط a التي من اجلها تكون المعادلة التكاملية

$$g(x) = \lambda \int_0^1 (ax - t)\, g(t)\, dt + f(x) \quad (1)$$

حل وحيد على أن $f(x) \in (0,1)$

$k(x,t) = ax - t$

$a_1(x) = ax \qquad a_2 x = -1$

$b_1(t) = 1 \qquad b_2(t) = t$

$g(x) = f(x) + \lambda \sum c_i a_i(x)$

$$g(x) = f(x) + \lambda c_1 a x - \lambda c_2 \quad (2)$$

c_1, c_2 نوجد

$$f_i + \lambda \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} c_j = c_i \qquad i = 1, 2$$

$$\left.\begin{aligned} f_1 + \lambda \alpha_{11} c_1 + \lambda \alpha_{12} c_2 &= c_1 \\ f_2 + \lambda \alpha_{21} c_1 + \lambda \alpha_{22} c_2 &= c_2 \end{aligned}\right\} (3)$$

$f_i = \int_0^1 b_i(t) f(t) dt$

$\alpha_{ij} = \int b_i(t)\, a_j(t) dt$

$f_1 = \int_0^1 f(t) dt \qquad f_2 = \int_0^1 t\, f(t) dt$

$\alpha_{11} = \int_0^1 a t\, dt = \frac{1}{2} a \qquad \boxed{\alpha_{11} = \frac{1}{2} a}$

$\alpha_{12} = -1 \qquad \alpha_{21} = \frac{1}{3} a \qquad \alpha_{22} = -\frac{1}{2}$

نعوض في (3) نجد

$$\left.\begin{aligned} (1 - \tfrac{1}{2}\lambda a) c_1 + \lambda c_2 &= f_1 \\ -\tfrac{1}{3} a \lambda c_1 + (1 + \tfrac{1}{2}\lambda) c_2 &= f_2 \end{aligned}\right\} (4)$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda a & \lambda \\ -\frac{1}{3} a \lambda & 1 + \frac{1}{2}\lambda \end{vmatrix}$$

$= \frac{1}{12} a \lambda^2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} a)\lambda + 1$

حتى تكون المعادلة حل وحيد يجب ان تكون $D(\lambda) \neq 0$ اي ان $D(\lambda) > 0$

موجب بمعنى لا يملك جذور اي المميز سالب

$$\Delta = \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{12} a < 0$$

$a^2 - \frac{10}{3} a + 1 < 0$

$a^2 - \frac{10}{3} a + (\frac{10}{6})^2 - (\frac{10}{6})^2 + 1 < 0$

$a^2 - \frac{10}{3} a + (\frac{5}{3})^2 < (\frac{5}{3})^2 - 1$

$(a - \frac{5}{3})^2 < \frac{16}{9}$

$-\frac{4}{3} < a - \frac{5}{3} < \frac{4}{3}$

$\frac{1}{3} < a < 3$

مثال 8

أوجد القيم الذاتية والتوابع الذاتية للمعادلة التكاملية

$$g(x) = \lambda \int_0^1 K(x,t)\, g(t)\, dt \quad (1)$$

علماً أن

$$K(x,t) = \begin{cases} x(1-t) & x \le t \\ t(1-x) & x \ge t \end{cases} \qquad 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le 1 \quad (2)$$

الحل: نعوض (2) في (1) [illegible]

$$g(x) = \lambda \int_0^x t(1-x)\, g(t)\, dt + \lambda \int_x^1 x(1-t)\, g(t)\, dt \quad (3)$$

نشتق طرفي المعادلة

$$g'(x) = -\lambda \int_0^x t\, g(t)\, dt + \lambda x(1-x)\, g(x) + \lambda \int_x^1 (1-t)\, g(t)\, dt - \lambda x(1-x)\, g(x)$$

$$g''(x) = -\lambda x\, g(x) - \lambda (1-x)\, g(x) = -\lambda g(x)$$

$$g''(x) + \lambda g(x) = 0 \quad (4)$$

هي معادلة تفاضلية [illegible]

$$\rho^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \rho^2 = -\lambda = \lambda i^2$$

$$\rho = \pm i \sqrt{\lambda}$$

الحل العام للمعادلة هو

$$g_n(x) = A \cos\sqrt{\lambda_n}\, x + B \sin\sqrt{\lambda_n}\, x \quad (5)$$

نجد A, B

إيجاد الشروط الحدية للمعادلة التفاضلية

من أجل $x = 0$ نعوض في (3)

$g(0) = 0$

[illegible] $x = 1$

$g(1) = 0$

$$g(0) = g(1) = 0 \quad (6)$$

نعوض (6) في (5)

$$g(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \quad (P)$$

$$g(1) = 0 \Rightarrow$$

$$A \cos\sqrt{\lambda} + B \sin\sqrt{\lambda} = 0 \quad (*)$$

نعوض P في B

$$\boxed{B \sin\sqrt{\lambda} = 0} \qquad B \ne 0$$

لأنه إذا كان $B = 0$ فإن $g(x) = 0$ حل تافه وهذا مرفوض بالتالي

$$\sin\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = n\pi \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\sqrt{\lambda_n} = n\pi \qquad \text{أو} \qquad \lambda_n = (n\pi)^2$$

نعوض في (5)

$$\sqrt{\lambda_n} = n\pi$$

$$A = 0 \qquad B = 1$$

$$g_n(x) = \sin n\pi x$$

$n = 1, 2, \ldots$